



ce
pre
UNI

TEORÍA

Geometría

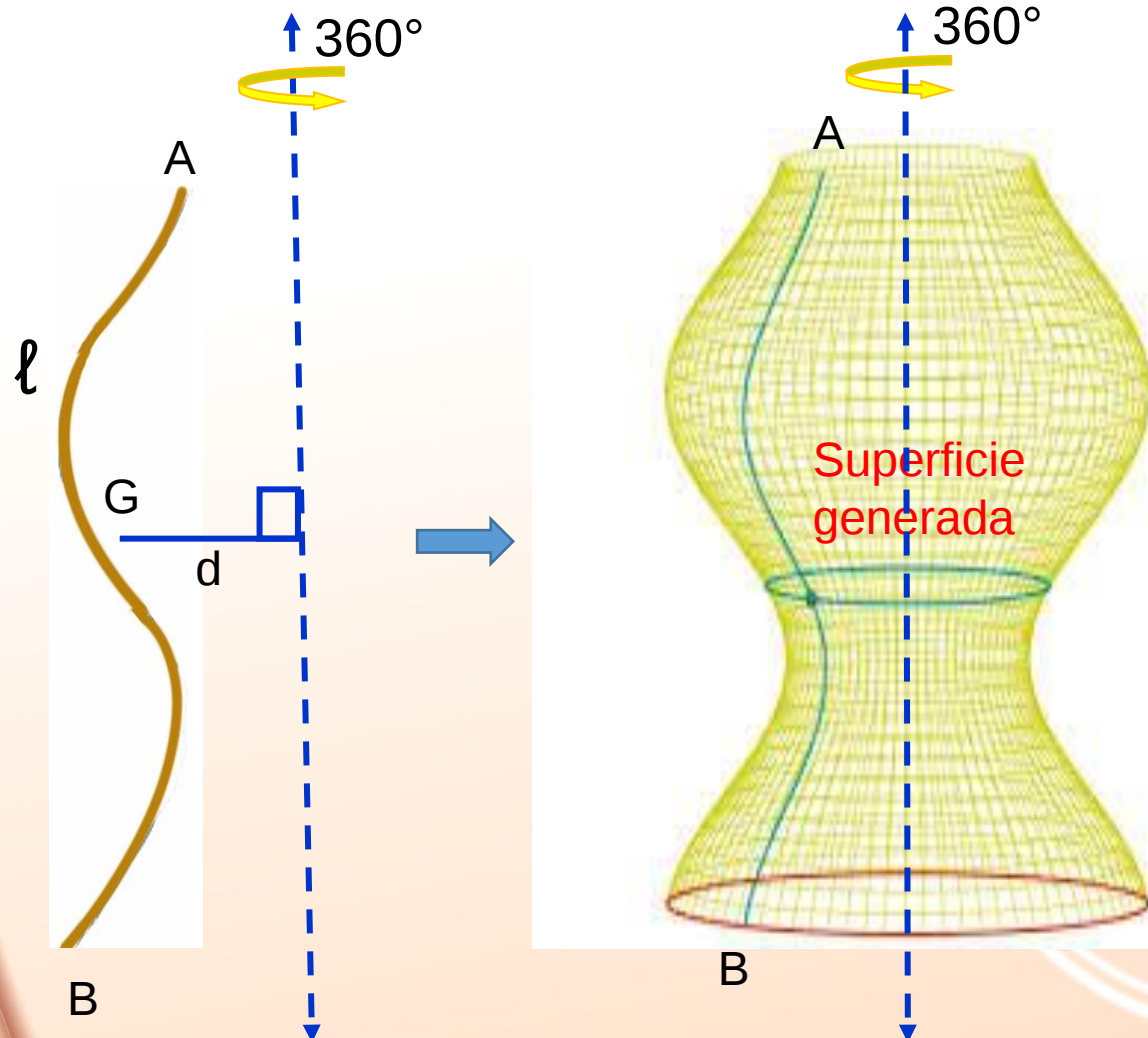
**TEOREMAS DE
PAPPUS-GULDIN**

**CICLO
PRE
2024-1**



SUPERFICIE GENERADA POR UNA LÍNEA PLANA

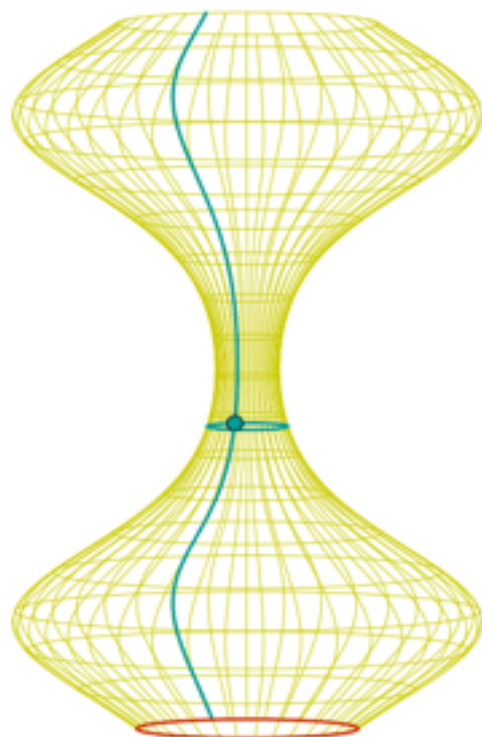
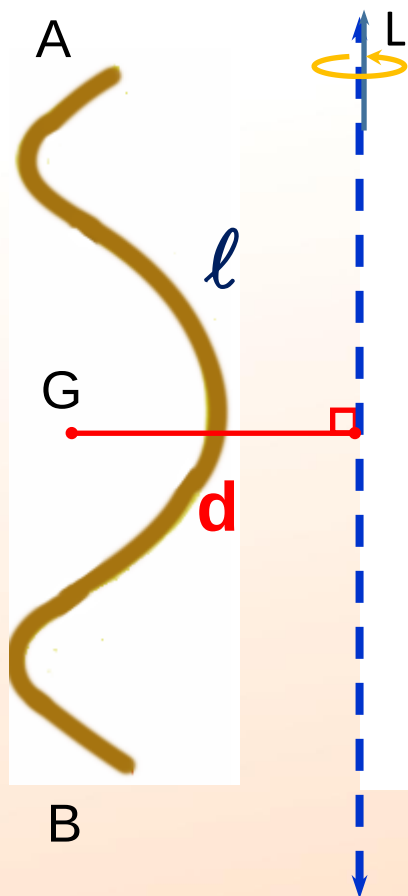
Definición.- Es la superficie generada al girar dicha línea, una vuelta alrededor de una recta coplanar y no secante a ella.



- Línea de extremos A y B
- S_G : superficie generada por la línea
- G : centroide de la línea
- l : longitud de la línea de extremos A y B
- d: distancia del centroide al eje
- L: eje de giro

ÁREA DE LA SUPERFICIE GENERADA POR UNA LÍNEA PLANA

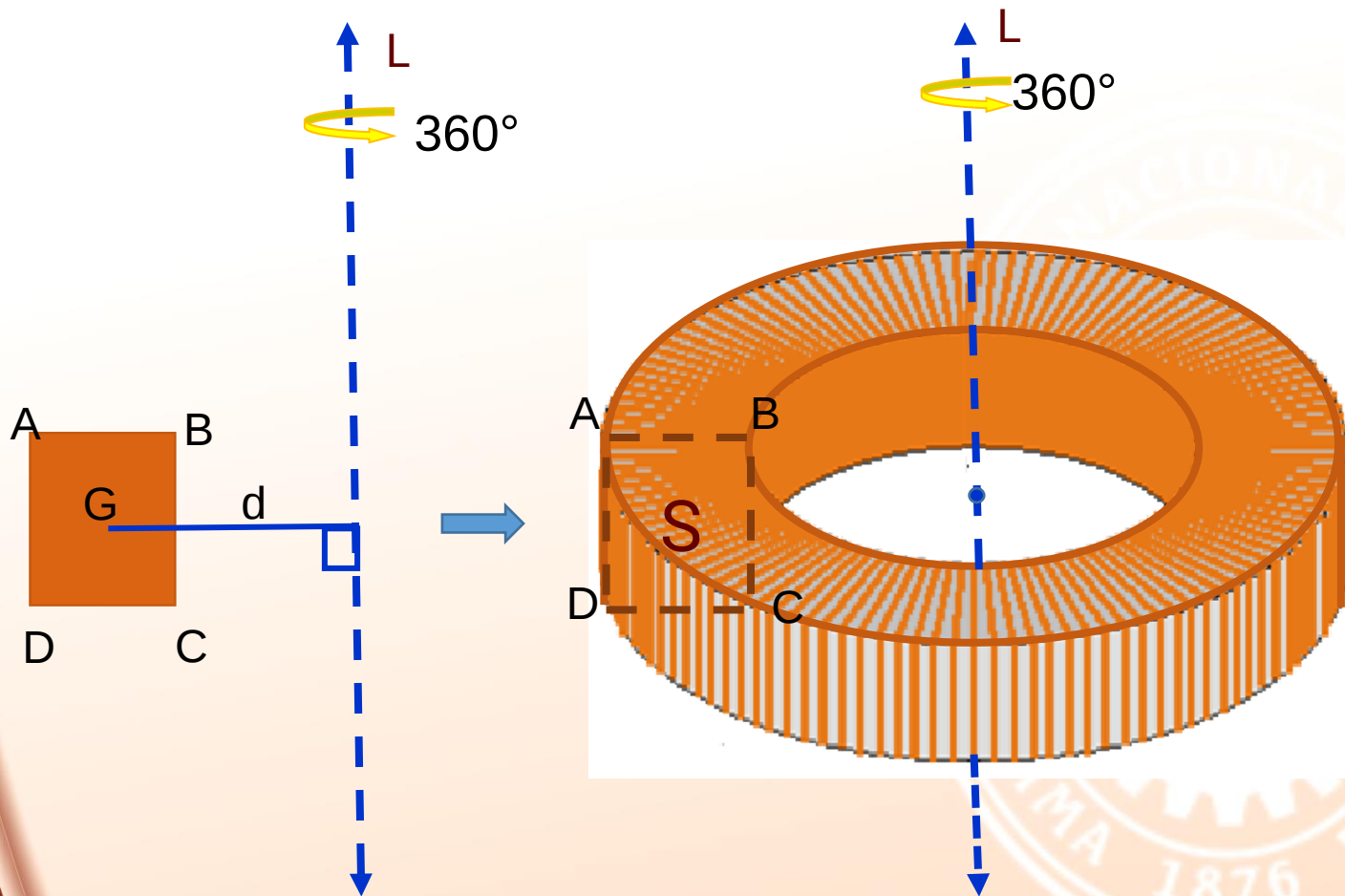
Teorema.- El área de la superficie generada por una línea plana, al girar una vuelta alrededor de una recta coplanar y no secante a la línea, es igual al producto de la longitud de la circunferencia que describe el centroide y la longitud de la línea.



$$S_{S.G.} = (2\pi d)l$$

SÓLIDO GENERADO POR UNA REGIÓN PLANA

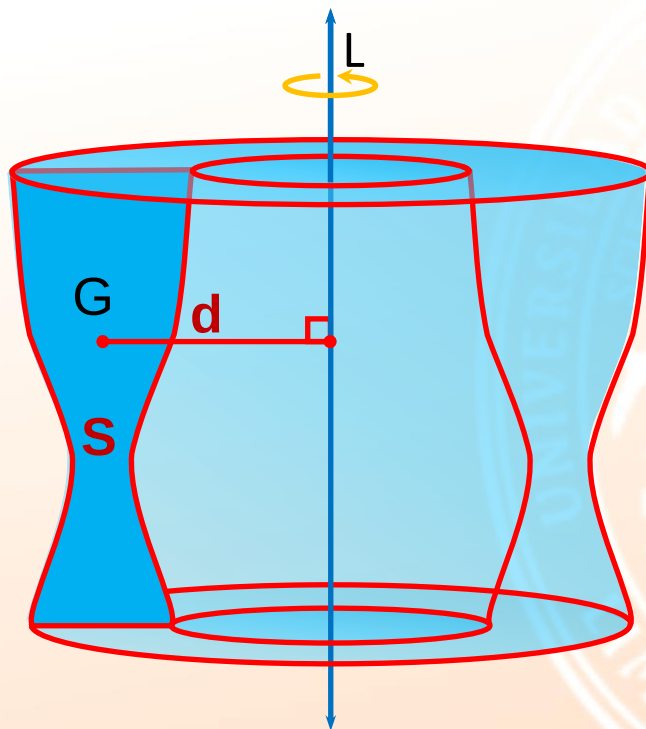
Definición.- Es el sólido generado por una región plana, al girar una vuelta alrededor de una recta coplanar que no contiene puntos interiores de la región.



- S_G : sólido generado por la región plana
- G: centroide de la región ABCD.
- S : área de la región plana
- d: distancia del centroide al eje
- L : eje de giro

VOLUMEN DEL SÓLIDO GENERADO POR UNA REGIÓN PLANA

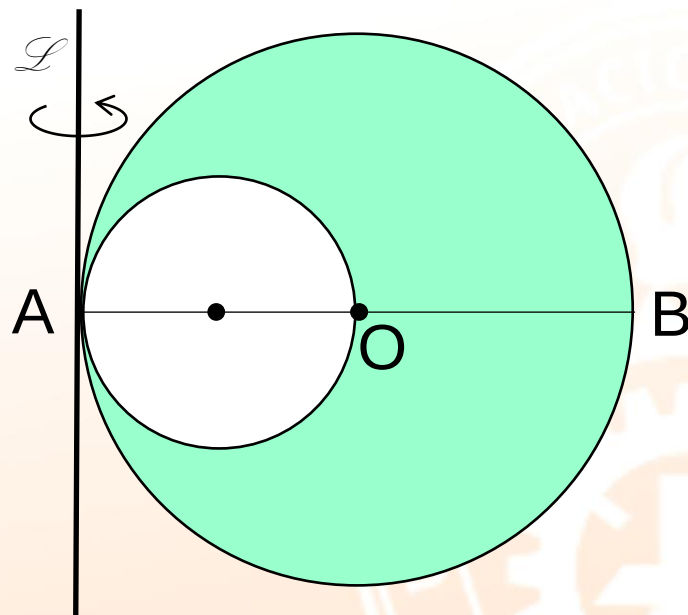
Teorema.- El volumen del sólido generado por una región plana, al girar una vuelta alrededor de una recta coplanar que no contiene puntos interiores de la región, es igual al producto de la longitud de la circunferencia que describe el centroide y el área de la región.



$$V_{S.G.} = (2\pi d)S$$

EJERCICIO 01

Las circunferencias son tangentes interiores en el punto A. Si $OA = OB = R$, calcule el área de la superficie generada por el perímetro de la región sombreada cuando gira una vuelta alrededor de la recta L.



A) $3\pi^2 R^2$

B) $3.5\pi^2 R^2$

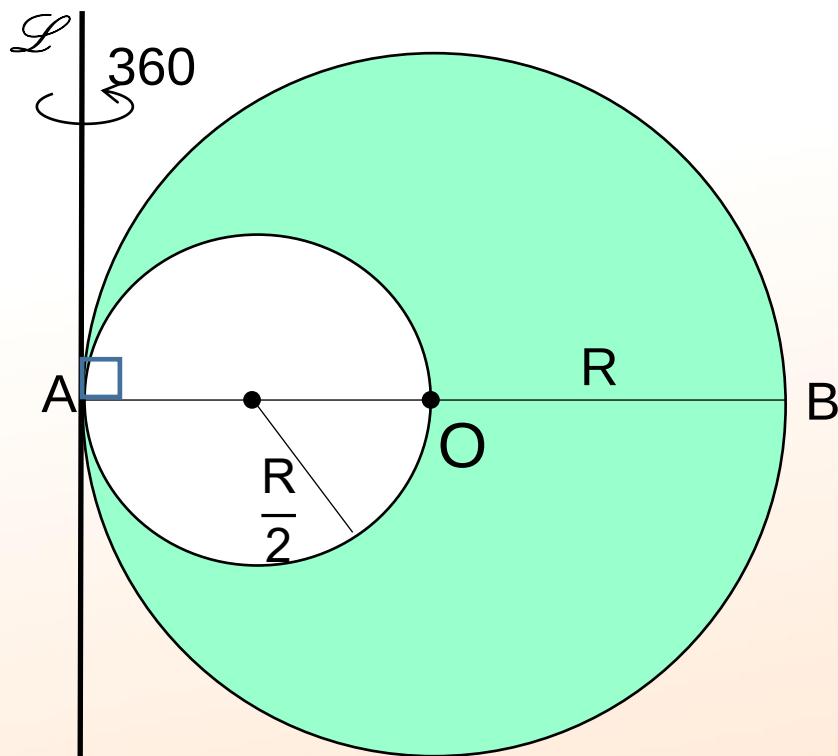
C) $4\pi^2 R^2$

D) $5\pi^2 R^2$

E) $6\pi^2 R^2$

RESOLUCIÓN 01

Las circunferencias son tangentes interiores en el punto A. Si $OA = OB = R$, calcule el área de la superficie generada por el perímetro de la región sombreada cuando gira una vuelta alrededor de la recta L.



$$OA = OB = R$$

$$S_g = 2\pi^2 ab$$

$$S_g = S_{\text{Circunferencia mayor}} + S_{\text{Circunferencia menor}}$$

$$S_g = 2\pi R(2\pi R) + 2\pi \left(\frac{R}{2}\right) 2\pi \left(\frac{R}{2}\right)$$

$$\therefore S_g = 5\pi^2 R^2$$

Clave: D

EJERCICIO 02

Una recta L y un disco de diámetro $\overline{AB}$ ($\overleftrightarrow{AB} \perp L$), están contenidos en un mismo plano. Si las distancias de A y B a la recta L son R y r ($R > r$), respectivamente, entonces el volumen del toroide que se genera al rotar el disco una revolución alrededor de L es

A) $\frac{\pi}{8}(R^2 - r^2)(R + 2r)$

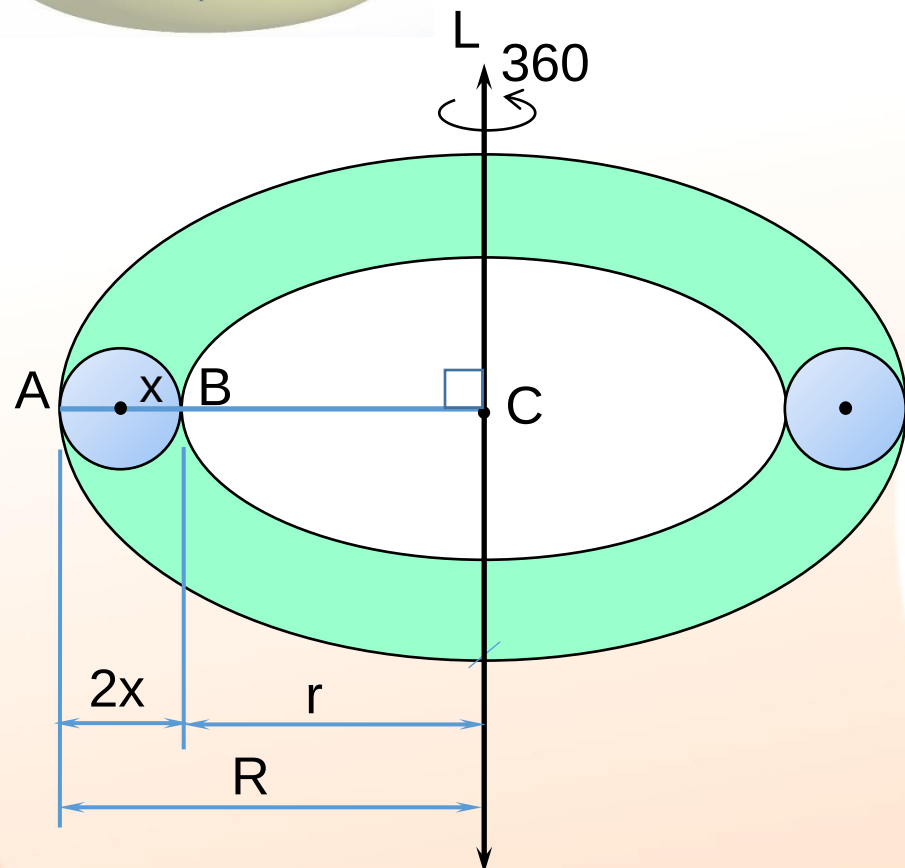
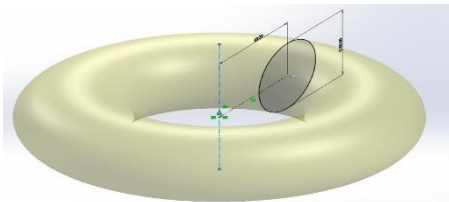
B) $\frac{\pi^2}{4}(R + r)(R - r)^2$

C) $\frac{\pi}{6}(R - r)$

D) $\frac{\pi^2}{4}(R + r)^2(R - r)$

E) $\frac{\pi^2}{8}(R^2 - r^2)(2R + r)$

RESOLUCIÓN 02



Una recta L y un disco de diámetro $\overline{AB}$ ($\overline{AB} \perp L$), están contenidos en un mismo plano. Si las distancias de A y B a la recta L son R y r ($R > r$), respectivamente, entonces el volumen del toroide que se genera al rotar el disco una revolución alrededor de L es

Datos: $AC = R$ y $BC = r$

Sea V el Volumen del toroide generado

Teorema de Pappus: $V = 2\pi(x + r) S \dots (1)$

En la figura: $x = \frac{R-r}{2}$; $x + r = \frac{R+r}{2}$ y

$$S = \pi(x)^2 = \pi \left(\frac{R-r}{2} \right)^2 \dots (2)$$

Reemplazando (2) en (1)

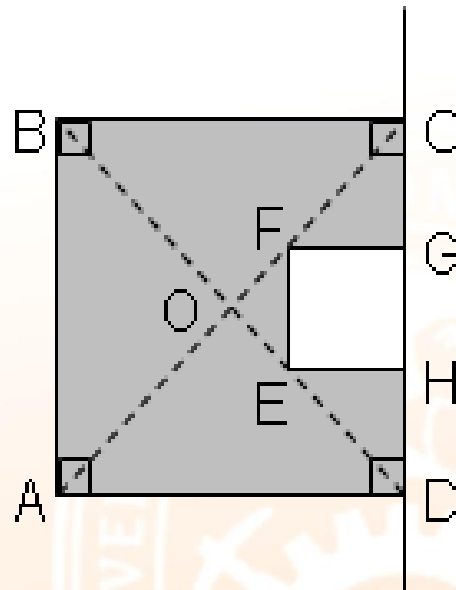
$$V = 2\pi \left(\frac{R+r}{2} \right) \pi \left(\frac{R-r}{2} \right)^2$$

$$V = \frac{\pi^2}{4} (R+r)(R-r)^2$$

Clave: B

EJERCICIO 03

En la figura se muestran los cuadrados ABCD y EFGH. Si $CD = \ell$, calcule el volumen del sólido generado por la rotación de la región sombreada cuando gira 360 alrededor de la recta CD.



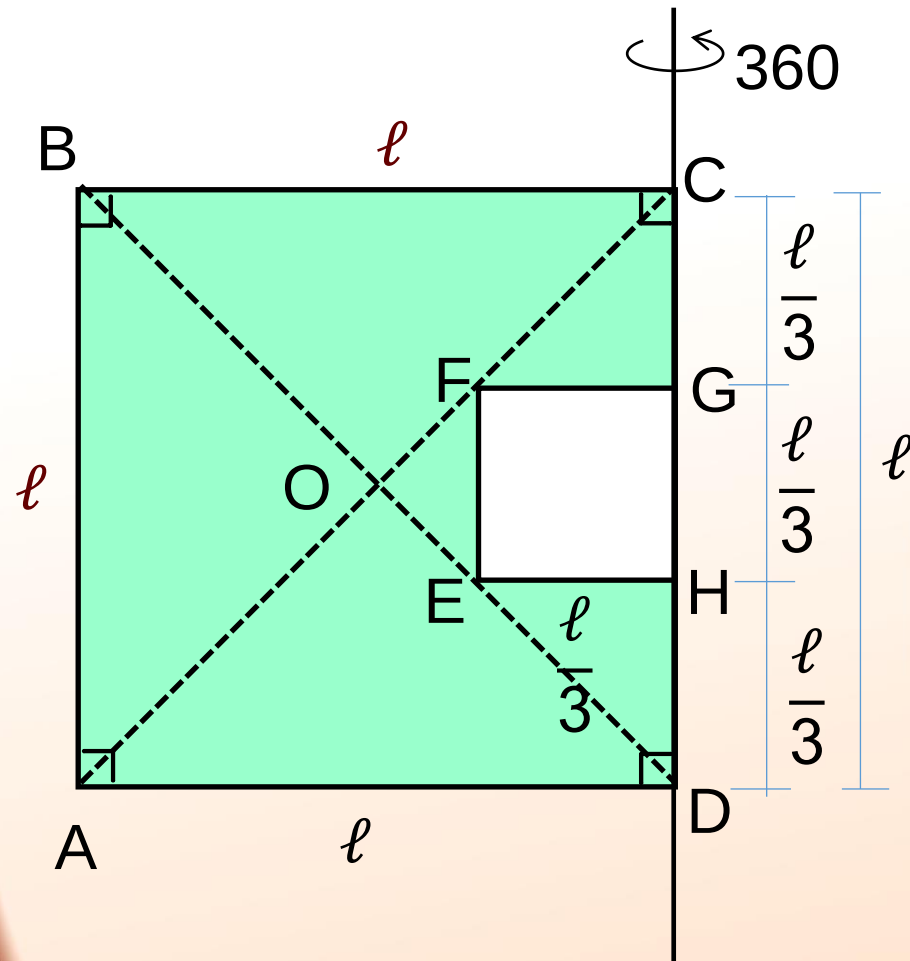
A) $\frac{25\pi\ell^3}{27}$
D) $\frac{24\pi\ell^3}{25}$

B) $\frac{26\pi\ell^3}{27}$
E) $\frac{24\pi\ell^3}{27}$

C) $\frac{25\pi\ell^3}{26}$

RESOLUCIÓN 03

En la figura se muestran los cuadrados ABCD y EFGH. Si $CD = \ell$, calcule el volumen del sólido generado por la rotación de la región sombreada cuando gira 360 alrededor de la recta CD.



Sea V el volumen del sólido generado por la región sombreada, $V = ?$

Se deduce en los cuadrados ABCD y EFGH

$$CG = GH = HD = \frac{\ell}{3}$$

Por teorema:

$$V = V_{(ABCD)} - V_{(EFGH)}$$

$$V = \pi \ell^2 (\ell) - \pi \left(\frac{\ell}{3}\right)^2 \left(\frac{\ell}{3}\right)$$

$$V = \pi \ell^3 - \frac{\pi \ell^3}{27} = \frac{26\pi \ell^3}{27}$$

Clave: B

EJERCICIO 04

En un sector circular AOB, la $m\angle AOB = 60$. Por un punto O se traza una recta L que determina con el radio $\overline{OB}$ un ángulo que mide 60 . Si G es el centro de gravedad del sector circular y $OA = R$, calcule OG.

A) $\frac{R}{\pi}$

B) $\frac{2R}{\pi}$

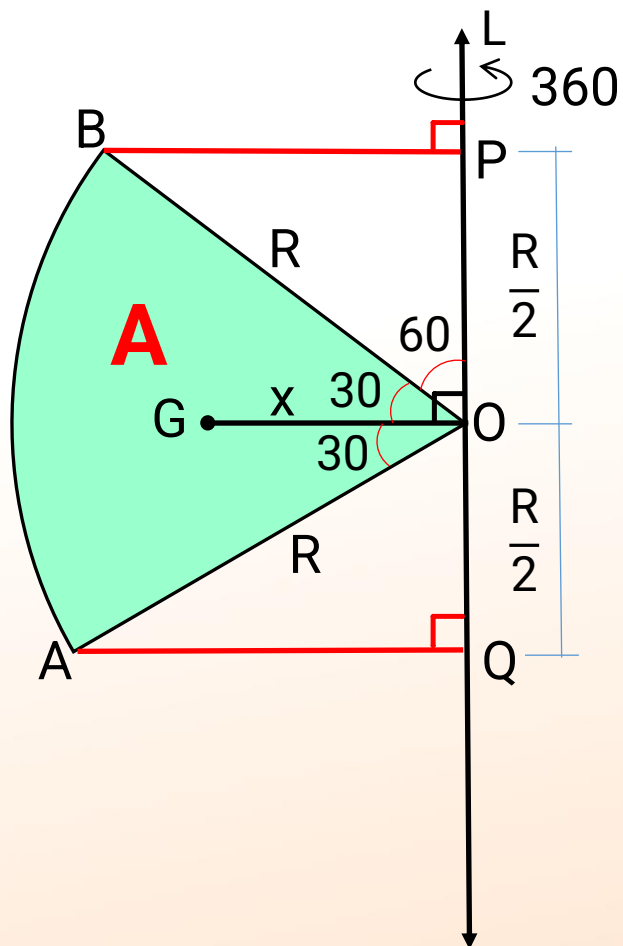
C) $\frac{3R}{2\pi}$

D) $\frac{4R}{3\pi}$

E) $\frac{3R}{\pi}$

RESOLUCIÓN 04

En un sector circular AOB, la $m\angle AOB = 60$. Por un punto O se traza una recta L que forma con el radio $\overline{OB}$ un ángulo que mide 60. Si G es el centro de gravedad del sector circular y $OA = R$, calcule OG.



En el sector circular AOB, G es centro de gravedad

Calcule $OG = x$

Teorema de Pappus: $V_{(S.G)} = 2\pi x(A)$

$$\text{Área(sector)} = A \rightarrow A = \frac{\pi R^2}{6}$$

$$V_{(S.G.)} = 2\pi x(A) = 2\pi x\left(\frac{\pi R^2}{6}\right) \dots (1)$$

$\triangle BPO$ es notable de 30 y 60

$$V_{(\text{sector esférico})} = \frac{2\pi R^2(R)}{3} \dots (2)$$

$$\text{De (1) y (2): } x = \frac{2R}{\pi}$$

Clave: B



ce
pre
UNI

TEORÍA

Geometría

**EJERCICIOS
PROPUESTOS**

**CICLO
PRE
2024-1**



Problema 277

Una región triangular equilátera cuyo lado mide L gira una vuelta completa alrededor de un eje perpendicular a un lado en el vértice. Calcule el volumen del sólido generado por la región triangular.

A) $\frac{\pi}{5} L^3 \sqrt{3}$

B) $\frac{\pi}{4} L^3 \sqrt{3}$

C) $\frac{\pi}{2} L^3 \sqrt{3}$

D) $L^3 \sqrt{3}$

E) $L^3 \sqrt{5}$

Problema 281

En una circunferencia de centro O y longitud de radio R, un arco AB mide 30° . Calcule la distancia del centroide del arco AB a la recta coplanar L que es perpendicular a OA en O.

A) $\frac{1}{\pi}R$

B) $\frac{3}{\pi}R$

C) $\frac{2}{\pi}R$

D) $\frac{4}{\pi}R$

E) $\frac{3}{2\pi}R$

Problema 282

Dos circunferencias concéntricas de centro O , tienen por longitud de radio R y $2R$, y determinan una corona circular. Calcule el volumen del sólido que se genera al girar la corona circular una vuelta alrededor de un eje coplanar, distante $3R$ de O .

A) $12\pi^2 R^3$

B) $14\pi^2 R^3$

C) $16\pi^2 R^3$

D) $18\pi^2 R^3$

E) $20\pi^2 R^3$

Problema 283

Un rectángulo ABCD gira alrededor de la recta L que contiene al vértice D y es paralela a $\overline{AC}$. Si los lados del rectángulo miden a y b, entonces el volumen del sólido generado por la región rectangular es

A) $\frac{2\pi}{\sqrt{a^2+b^2}}ab$

B) $\frac{2\pi}{\sqrt{a^2+b^2}}a^2$

C) $\frac{2\pi}{\sqrt{a^2+b^2}}b^2$

D) $\frac{2\pi}{\sqrt{a^2+b^2}}a^2b^2$

E) $\frac{\pi}{\sqrt{a^2+b^2}}a^2b^2$

Problema 284

El perímetro de una región triangular equilátera ABC es $30\sqrt{3}$ u, una recta L que sólo interseca al triángulo en el vértice C, determina con el lado AC un ángulo que mide 7° . Calcule el volumen (en u^3) del sólido generado por la región triangular al girar una vuelta alrededor de la recta L.

A) $540\sqrt{3}\pi$

B) $840\sqrt{3}\pi$

C) $800\sqrt{3}\pi$

D) $600\sqrt{3}\pi$

E) $900\sqrt{3}\pi$

Problema 286

Se tiene un cuadrilátero ABCD inscrito en una circunferencia cuyo radio mide R , tal que $AD = 2R$ y el arco BC mide 120° . Si el cuadrilátero gira alrededor de la recta BC, entonces el área de la superficie generada por el lado AD es

A) $2\pi R^2$

B) $\frac{2}{3}\pi R^2$

C) $\frac{3}{2}\pi R^2$

D) $\frac{1}{3}\pi R^2$

E) $\frac{5}{3}\pi R^2$

Problema 288

En un hexágono regular ABCDEF, el perímetro es igual 18 u, con centros en los puntos B y E se trazan los arcos AC y DF. Calcule la suma de las áreas (en u^2) de las superficies generadas por los arcos AC y DF al girar una vuelta alrededor de la recta AF.

A) $12\sqrt{3}\pi^2$

B) $15\sqrt{3}\pi^2$

C) $9\sqrt{3}\pi^2$

D) $16\sqrt{3}\pi^2$

E) $12\sqrt{6}\pi^2$

Problema 289

Se tiene un hexágono regular $ABCDEF$ cuyo lado mide $4u$ y una recta L que solo contiene al vértice F y determina con el lado $\overline{EF}$ un ángulo que mide 15° . Calcule el área (en u^2) de la superficie generada por el triángulo BFD al girar una vuelta alrededor de la recta L .

A) $24\pi(3\sqrt{2} + \sqrt{6})$

B) $12\pi(3\sqrt{2} + \sqrt{6})$

C) $24\pi(\sqrt{2} + \sqrt{6})$

D) $24\pi(\sqrt{3} + \sqrt{6})$

E) $16\pi(\sqrt{2} + \sqrt{6})$